

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\nu_g} \frac{\alpha Z}{\beta} \ll 1$$

von Kramers, wenn noch $\frac{\alpha Z}{\beta} \gg 1$ vorausgesetzt wird.

Zur Darstellung des Funktionsverlaufs von g'' in Abhängigkeit von $\alpha Z/\beta$ spalten wir (33) auf in

$$g'' = -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \ln \frac{\nu}{4\nu_g} + \Phi \right\}, \quad (34)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Phi(|n_1|) &= \Phi\left(\frac{\alpha Z}{\beta}\right) = C + \operatorname{Re} \psi\left(i|n_1|\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n_1|^2}{n(n^2 + |n_1|^2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Man kann leicht einige Werte von Φ berechnen und erhält dann die in Abb. 1 wiedergegebene Kurve. Zum Vergleich ist die entsprechende klassische Kurve

$$\Phi' = C + \ln \frac{\alpha Z}{\beta}$$

mit eingezeichnet. Man erkennt beispielsweise, daß die klassische Formel noch bis zu ziemlich kleinen Werten von $\alpha Z/\beta$ praktisch gültig ist; die Abweichungen sind für $\alpha Z/\beta = 1$ noch kaum merklich. Dieser Wert entspricht etwa der Strahlung der Milchstraße. Man hat bei ihrer Berechnung also konsequenterweise nicht die Gaunt-

Mauesche Formel, sondern die klassische zu verwenden. Hierauf wird in einer Berichtigung zu Unsölds Arbeiten über die Theorie der Radiofrequenzstrahlung¹⁶ näher eingegangen.

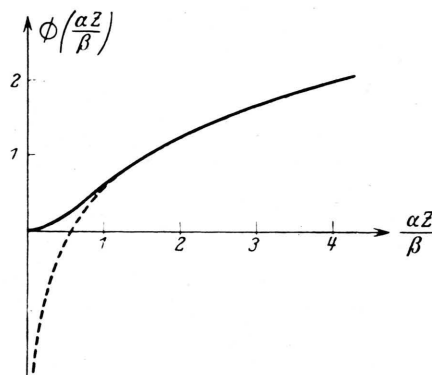


Abb. 1. Zur Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von $\alpha Z/\beta$. Ausgezogene Kurve $\Phi = \operatorname{Re} \psi\left(i \frac{\alpha Z}{\beta}\right) + C$; gestrichelte Kurve $\Phi' = \ln \alpha Z/\beta + C$.

Die vorstehenden Rechnungen sind im Anschluß an Geheimrat Sommerfelds Arbeiten über das kontinuierliche Röntgenspektrum entstanden. Der Verf. erlaubt sich daher, sie seinem verehrten Lehrer in dankbarer Erinnerung an seine Münchener Studienzeit zum 80. Geburtstag zu widmen.

¹⁶ G. Burkhardt, G. Elwert u. A. Unsöld, Z. Astrophysik, im Erscheinen.

Die Innentemperaturen der überdichten Zwerge und das Auftreten von Bose-Entartung

Von LUDWIG BIERMANN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 3 a, 481—485 [1948]; eingegangen am 4. August 1948)

Die Temperatur des Inneren der überdichten Sterne unterhalb der Hauptreihe im Farbenhelligkeitsdiagramm wird mit den Mitteln der Theorie des Sternaufbaus untersucht. Für die Sterne sehr geringer Leuchtkraft ($< 10^{-4}$ derjenigen der Sonne) finden sich Werte um 1 Million Grad. Im Verein mit der überaus hohen Dichte bewirkt dies Entartung (im Sinne der statistischen Mechanik) nicht nur der freien Elektronen, sondern auch der leichtesten Atomkerne.

Bis vor etwa zehn Jahren waren nur wenige überdichte Sterne bekannt, die damals als „weiße Zwerge“ bezeichnet wurden, da sämtliche untersuchten Exemplare eine Oberflächentemperatur von etwa 8000° oder mehr aufwiesen. Inzwischen¹ hat man aber unter den Sternen großer

Eigenbewegung eine größere Anzahl absolut sehr lichtschwacher Sterne *aller* Farben gefunden, so daß die frühere Bezeichnung offenbar nicht mehr anwendbar ist. Da ihr wesentliches Charakteristi-

¹ S. Bericht in der Himmelswelt 55, 80 [1947] (nach Luyten, Monthly Astronom. Newsletters 31).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

kum die überaus hohe Dichte ist (überaus hoch im Vergleich zur Dichte irdischer Stoffe), seien sie hier als „überdichte Zwerge“ bezeichnet.

Um einen quantitativen Anhalt für die vorkommenden Dichten zu gewinnen, bemerken wir, daß in allen Fällen, wo es sich um Glieder eines Doppelsternsystems handelt, die Massen sich zu größenordnungsmäßig einer Sonnenmasse M_{\odot} ergeben haben (meist $\frac{1}{2}$ bis $1 M_{\odot}$). Auch die Theorie des inneren Aufbaus verlangt für Sterne dieser Dichten Massen um $1 M_{\odot}^2$; sonst ist kein hydrostatisches Gleichgewicht möglich. Der Unterschied der absoluten Helligkeit gegen die der Sonne beträgt oft um 10^m und anscheinend in Einzelfällen bis zu 15^m . Dies ergibt bei gleicher Farbe ein Verhältnis der Radien R von 1 : 100 bzw. 1 : 1000, mittlere Dichten der Ordnung 10^6 bzw. 10^9 (die mittlere Dichte der Sonne beträgt $1,4 \text{ g/cm}^3$) und Werte der Schwerkbeschleunigung g an der Oberfläche von 10^4 – $10^6 g_{\odot}$ ($g_{\odot} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}^2$).

Für die Beurteilung des physikalischen Zustands dieser Sterne, insbesondere im Hinblick auf das Auftreten von Entartung (im Sinne der statistischen Mechanik)³ der Atomkerne und von Kernprozessen, ist es nun wichtig, ihre Innentemperaturen zu kennen. Die Untersuchung der zunächst bekannten weißen Vertreter dieser Klasse führte auf Temperaturen der Ordnung 10^7 Grad. Der Temperaturanstieg von der Oberflächentemperatur bis zur Innentemperatur erfolgt praktisch ganz in der dünnen, nicht entarteten Außenzone des Sterns. Sobald die Entartung einsetzt, wird die Wärmeleitfähigkeit der freien Elektronen so groß, daß man nahezu isotherme Verhältnisse hat.

Die genannten Untersuchungen der Temperaturverhältnisse bezogen sich auf Sterne vom Typus der zuerst bekannten überdichten Zwerge, für die etwa der Begleiter des Sirius als Prototyp gelten mag. Für die Sterne geringerer Leuchtkraft ändern sich die Verhältnisse aber sehr erheblich.

Um einen vollständigen Überblick über die Druck-Temperatur-Beziehung („Weggleichung“) in den äußeren Teilen der Sterne zu bekommen, betrachten wir zunächst das Diagramm Abb. 1 mit den Koordinaten $\log P$ (P Gesamtdruck) und $\log p_R$ (bzw. $\log T$; p_R ist der Strahlungsdruck,

T die Temperatur). Die Drucke sind in dyn/cm^2 gerechnet⁴. Eingetragen ist links oben die Grenze $p_R = P$, längs der der Gasdruck verschwindet. Gestrichelt sind angegeben die Kurven ϱ (Dichte) = const, strichpunktirt die verschiedenen Entartungsgrenzen. Rechts unterhalb der Entartungsgrenze für die freien Elektronen, bis zur Ordinate $P = 10^{29}$, ist der Druck eine praktisch eindeutige Funktion der Elektronendichte und damit bei gegebener chemischer Zusammensetzung der Massendichte. Hinsichtlich der Zusammensetzung ist angenommen, daß es sich überwiegend um Helium handelt. Die Druck-Dichte-Beziehung für Entartung ist an der Abszissenachse angegeben. Oberhalb von $P = 10^{29}$ ist die Bildung von Neutronen energetisch günstig, weil die Nullpunktsenergie der freien Elektronen größer ist als der Energieunterschied der Ruhmassen von Proton und Neutron. Das Diagramm enthält noch die Entartungsgrenzen für Protonen und Heliumkerne sowie die Grenze, bei der die mittlere Geschwindigkeit der freien Elektronen vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit wird („relativistische Entartung“).

Die Transportgleichung der Energie lautet im Falle stabiler Schichtung bei Kugelsymmetrie (r Abstand vom Sternmittelpunkt)

$$H = -(\lambda + \lambda_R) \frac{dT}{dr} \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}, \quad (1)$$

wo λ der gewöhnliche Wärmeleitungskoeffizient und λ_R der entsprechende Koeffizient für die Strahlung ist (vgl. Hund⁴). Eine Anzahl von Kurven λ und $\lambda_R = \text{const}$ sind eingetragen, die ersteren auf Grund der Arbeiten von Kothari⁵, deren numerische Resultate nur im Hinblick auf die anders vorausgesetzte chemische Zusammensetzung modifiziert wurden, unter Berücksichtigung der Diskussion bei Hund⁴. Für λ_R wurde die von Hund benutzte Näherung übernommen: dies läuft etwa auf einen Korrekturfaktor zum Kramersschen Gesetz von $\approx 1/40$ hinaus („Guilotinefaktor“ ≈ 40), der für den Temperatur-Druckbereich nahe der Entartungsgrenze angemessen erscheint⁶. Man erkennt, daß der Bereich, [1936] ist zu beachten, daß diese letzteren die Atmosphäre als Druckeinheit voraussetzen.

⁵ Kothari, Philos. Mag. J. Sci. **13**, 361 [1932]; Monthly Notices Roy. astronom. Soc. **93**, 61 [1932].

² S. hierzu Chandrasekhar, Introduction to the Theory of Stellar Structure, Chicago 1938.

³ Sommerfeld, Z. Physik **47**, 1 [1928]; Fowler, Monthly Notices Roy. astronom. Soc. **87**, 114 [1926].

⁴ Beim Vergleich mit den entsprechenden Diagrammen bei Hund, Ergebn. exakt. Naturwiss. **15**, 189

⁶ Strömberg, Z. Astrophysik **4**, 118 [1932]; Morse, Astrophysic. J. **92**, 27 [1940]; Biermann, Z. Astrophysik **22**, 244 [1943]. Nahe der Entartungsgrenze wird der relative Beitrag der frei-frei-Übergänge immer größer; diese allein geben einen Guilotinefaktor 196.

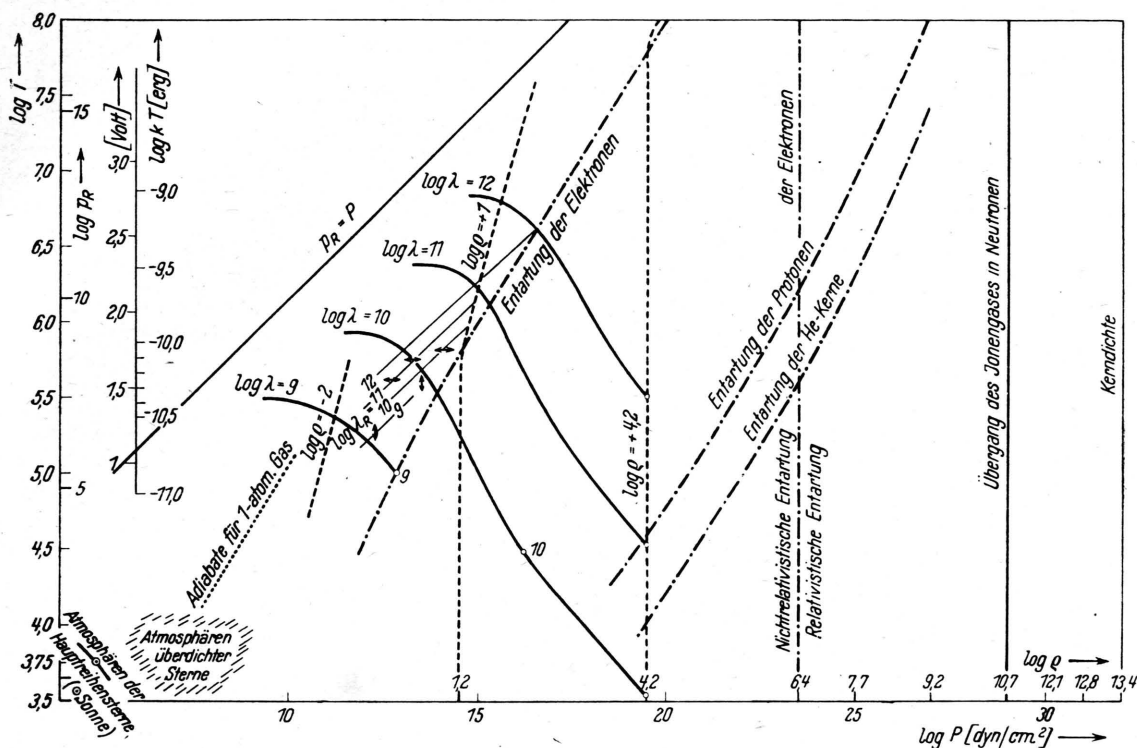


Abb. 1. Zustandsdiagramm.

in dem $\lambda > \lambda_R$ ist, bei diesen Temperaturen etwas in den nichtentarteten Teil des Zustandsdiagramms übergreift (vgl. Hund⁴).

Die Transportgleichung, mit der hydrostatischen Gleichung kombiniert, liefert (R Gaskonstante pro Mol, μ mittleres Molekulargewicht, G Gravitationskonstante, M Masse des Sterns)

$$\frac{d \log T}{d \log P} = \frac{P}{T} \frac{H}{(\lambda + \lambda_R)} \frac{1}{g \rho} \quad (2)$$

$$= \frac{\mu P}{R \rho T} \frac{R}{4 \pi G} \frac{L}{\mu M} \frac{1}{(\lambda + \lambda_R)}.$$

Der erste Faktor ist links und oberhalb der Entartungsgrenze $= 1$. Im Entartungsgebiet ist er konstant längs Geraden, die parallel zur Entartungsgrenze verlaufen, und zwar für $P = \text{const} \sim 1/T$. Der zweite Faktor ist numerisch $= 10^{+14.0}$. Der dritte Faktor beträgt für die Sonne und $\mu = 4/3$ ($2 \times$ ionisiertes Helium) etwa 1,4, für die hier betrachteten Sterne also 10^{-4} (für einen Unterschied der absoluten Helligkeit von 10^m) bis zu 10^{-6} .

Für einen Stern mit $L/\mu M = 10^{-4.6}$ wird für $(\lambda + \lambda_R) = 10^{10}$

$$\frac{d \log p_R}{d \log P} = 4 \quad \text{und} \quad \frac{d \log T}{d \log P} = 1.$$

Diesen wollen wir im folgenden als Beispiel ins Auge fassen; die entsprechenden Modifikationen für andere Werte von $L/\mu M$ ergeben sich daraus ohne Schwierigkeit.

Die Abb. 1 enthält ferner noch die Punkte, welche der mittleren Photosphäre der Sonne und der benachbarten Hauptreihensterne (linke untere Ecke) sowie der überdichten Zwerge entsprechen (schraffierter Bereich). Für gleiche Photosphärentemperatur und gleiche chemische Zusammensetzung der Atmosphäre ist der Druck in einer fest angenommenen optischen Tiefe der Ordnung $1 \sim \sqrt{g}$.

Endlich ist eingetragen eine Adiabate für ein einatomiges Gas. Die Adiabaten sind wichtig wegen des Einflusses, den der konvektive Mechanismus des Energietransports auf die Schichtung haben kann. Dieser Mechanismus ist für die Wasserstoffkonvektionszone (WKZ) — die Schicht, in der die Ionisationsenergie des Wasserstoffs das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v merklich herabdrückt und dadurch die Schichtung instabil macht, — untersucht worden durch H.

Siedentopf⁷ und durch den Verf.⁸. Es zeigte sich folgendes. Im Fall der Sonne ist die Dichte in der WKZ wahrscheinlich schon so groß, daß der Energietransport durch Konvektion den größten Teil des aus dem Innern kommenden Energieflusses vom Betrage $6,3 \cdot 10^{10}$ erg/cm² sec übernehmen kann. Der Temperaturgradient sollte daher den adiabatischen nicht wesentlich übersteigen.

Quantitativ hängt die Adiabatie der bewegten Turbulenzelemente und damit die relative Bedeutung des Strahlungstransportes und des konvektiven Transports ab von dem Ausdruck

$$\frac{H_s}{c_p \varrho T v} = \frac{R}{\mu c_p} \frac{H_s}{p_G v}.$$

Hier bedeuten: H_s den Energiefluß durch Strahlung (maximal gleich dem beobachteten Energiefluß an der Oberfläche H), c_p die spezif. Wärme pro Gramm bei konstantem Druck, ϱ die Dichte, T die Temperatur, R die Gaskonstante, μ das mittlere Molekulargewicht, p_G den Gasdruck und v die Geschwindigkeit der Turbulenzelemente. Je größer der Nenner ist im Verhältnis zum Zähler, desto effektiver ist der turbulente Mechanismus. Nun ist für Sterne gleicher Farbe H_s konstant,

während p_G in erster Näherung $\sim \sqrt{g}$ ist; v (bei der Sonne einige km/sec) ändert sich nur langsam mit dem Radius R . Im Vergleich zur Sonne ändern sich daher die Verhältnisse etwa $\sim 1/R$ zugunsten des konvektiven Transports. Man darf daher mit Sicherheit annehmen, daß die WKZ und die anschließende Heliumkonvektionszone dieser Sterne adiabatisch geschichtet sind und daß überhaupt der adiabatische Temperaturgradient nirgends in diesen Sternen überschritten wird. Hierbei ist für die Oberflächenzone (anders als für das Innere) allerdings die gleiche chemische Zusammensetzung (nämlich Überwiegen des Wasserstoffanteils nach Atomzahlen) wie für die Hauptreihensterne angesetzt. Falls diese Voraussetzung, die an anderer Stelle diskutiert werden wird, nicht zutrifft, ist der Druck in der Photosphäre anders (vermutlich niedriger).

Es ergibt sich also, daß der adiabatische Temperaturgradient zwar beliebig unterschritten werden kann, daß Überschreitungen aber nur in geringem Ausmaß vorkommen sollten.

Der Wert von $(d \log p_R / d \log P)_{ad}$ ist für ein einatomiges Gas 8/5. In den Hauptionisationsbereichen der häufigsten Elemente ist der Wert kleiner,

und zwar ist die Erniedrigung um so stärker, je stärker sich die Zahl der freien Elektronen pro Gramm Materie mit der Temperatur ändert und je größer der Abstand von der Entartungsgrenze ist. Für das vorliegende Problem ist die genauere Festlegung der Adiabaten und des Drucks in der Photosphäre, wie sie etwa für die Sonne durchgeführt werden mußte, nicht erforderlich, da sich zeigen wird, daß die zu ziehenden Schlußfolgerungen nicht davon abhängen.

Wir haben nun alle Mittel zur Verfügung, um den Verlauf der Weggleichung in der $\log P$ - $\log p_R$ -Ebene zu ermitteln⁹.

⁷ H. Siedentopf, *Astron. Nachr.* **247**, 297 [1932]; **255**, 157 [1935].

⁸ L. Biermann, *Astron. Nachr.* **264**, 395 [1938]; *Z. Astrophysik* **21**, 320 [1942]; **22**, 244 [1943].

⁹ Vgl. hierzu etwa den Bericht des Verf. in *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **21**, 1 [1945].

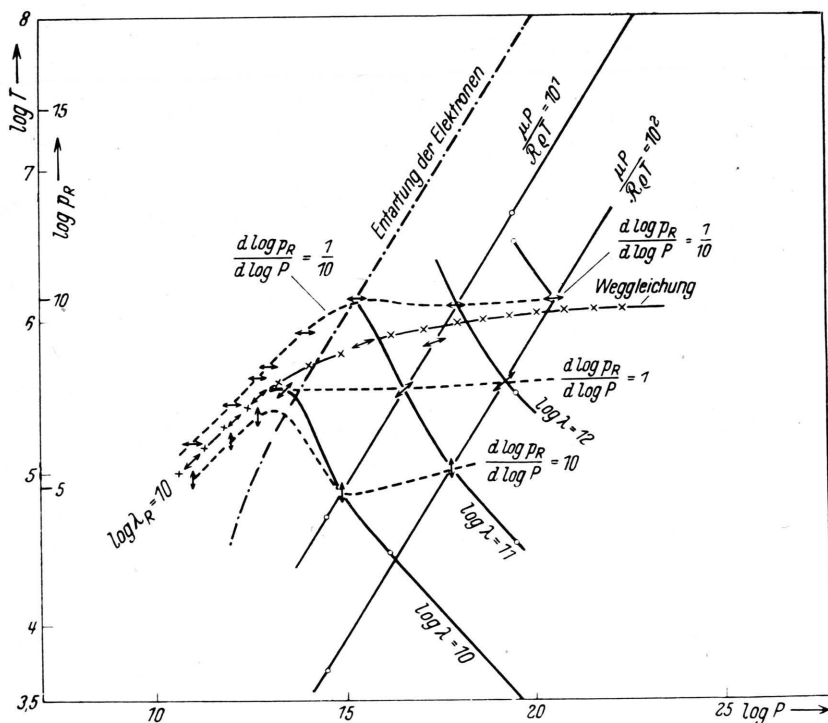


Abb. 2. Weggleichung und Kurven $\frac{d \log p_R}{d \log P} = \text{konstant}$.

Als Beispiel betrachten wir (wie schon bemerkt) einen Stern mit $L/\mu M = 10^{-4,6}$. Für diesen gilt

$$\frac{d \log p_R}{d \log P} = \frac{\mu P}{R \varrho T} \frac{10^{10}}{(\lambda + \lambda_R)} \quad (3)$$

bzw.

$$\frac{d \log p_R}{d \log P} = \left(\frac{d \log p_R}{d \log P} \right)_{\text{ad}}, \quad (3a)$$

falls dieser letztere Differentialquotient der kleinere ist.

Die durch Gl. (3) gegebenen Differentialquotienten tragen wir nun als Doppelpfeile in ein Diagramm mit den gleichen Koordinaten ein (Abb. 2), und zwar sind eingetragen zunächst einige Doppelpfeile der Steigung 1, die im nichtentarteten Bereich gegeben sind durch $\lambda + \lambda_R = 10^{10}$, im entarteten Bereich des Diagramms durch die Schnitte der Geraden $\mu P/R \varrho T = \text{const}$ mit den Kurven $\lambda = \text{const}$. Darüber sind eingetragen eine Anzahl Doppelpfeile $(d \log p_R/d \log P) = 1/10$, und darunter solche mit $(d \log p_R/d \log P) = 10$. Im entarteten Bereich sind außerdem noch zwei Doppelpfeile mit $(d \log p_R/d \log P) = 1/3$ dargestellt, um den Verlauf der Weggleichung besser beurteilen zu können.

Das Diagramm zeigt, daß im nichtentarteten Bereich die Weggleichung ziemlich genau längs einer Kurve $\lambda_R = \text{const}$ verlaufen muß, und zwar fast unabhängig von dem speziellen Verlauf in Oberflächennähe; die verschiedenen speziellen Lösungen der Differentialgleichung konvergieren sehr rasch zu wachsenden Drucken hin, vor allem im Bereich oberhalb $\lambda_R = 10^{10}$. Aus diesem Grunde kommt es auf den präzisen Wert des Drucks in der Photosphäre nicht an. Im Bereich unterhalb der Kurve $\lambda_R = 10^{10}$ verhindert zwar die Konvektion, daß der Wert (3a) überschritten wird. Dies bedeutet aber nur, daß die Weggleichung höchstens noch tiefer als gezeichnet, d. h. zu niedrigeren Temperaturen hin, verlaufen kann. Im Falle exakter Gültigkeit des Kramersschen Gesetzes gilt, wie bekannt,

$$P \sim T^{4,25},$$

also

$$\frac{d \log p_R}{d \log P} = \frac{16}{17}, \quad \lambda_R = \text{const},$$

und die Weggleichung folgt der Geraden

$$\lambda_R = \frac{17}{16} \cdot 10^{10}.$$

Im entarteten Gebiet nähert sich offenbar die Weggleichung einer Isotherme. Analytisch gilt mit $\lambda = c_1 \varrho T$

$$c_1 = \frac{1}{16} \frac{h^3 k^2}{e^4 m^2 \mu m_H Z \ln(1 + \alpha_0^2)} = \frac{7,4 \cdot 10^3}{2 \pi \ln(1 + \alpha_0^2)},$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi^{-2/3}}{80} \frac{h^2}{m e^2} \frac{3^{5/3}}{Z^{2/3}} N_e^{1/3} = 0,33 \varrho^{1/3},$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{\mu}{4 \pi G} \frac{L}{\mu M} \frac{1}{c_1 \varrho^2 T} = 10^{-1,2} \cdot \frac{1}{\varrho^2 T},$$

mit

$$P = 2,3 \cdot 10^{-27} N_e^{5/3} = 10^{12,50} \varrho^{5/3}$$

bzw.

$$\varrho^2 = 10^{-15,0} \cdot P^{6/5}.$$

Dies gibt (der Stern * bezeichnet Werte an der Entartungsgrenze)

$$T dT = 10^{13,8} \cdot \frac{dP}{P^{6/5}}, \quad T^2 - T_*^2 = 10^{14,8} (P_*^{-1/5} - P^{-1/5}),$$

also als Grenztemperatur im Innern etwa $10^{6,0}$ Grad (T_* zu $10^{5,7}$, P_* zu $10^{14,3}$ angenommen).

Ergänzend sei hierzu bemerkt¹⁰, daß, solange nur die Ionen nichtentartet sind, auch bei nicht-relativistischer Entartung der Elektronen

$$\left(\frac{d \log p_R}{d \log P} \right)_{\text{ad}} = \frac{8}{5}$$

ist, bei relativistischer Entartung der Elektronen

$$\left(\frac{d \log p_R}{d \log P} \right)_{\text{ad}} = 2.$$

Der angenommene Stern hätte nun eine mittlere Dichte von etwa 10^7 , also eine Mittelpunktsdichte von annähernd 10^9 (Polytrogenindex schon fast 3). Das erste Diagramm zeigt dann, daß in den inneren Teilen des Sterns auch die He-Kerne entartet sein müssen. Die He-Kerne sind die leichtesten Teilchen, welche Bose-Entartung zeigen.

Um zu erkennen, bis zu welcher Leuchtkraft Entartung der He-Kerne zu erwarten ist, betrachten wir den Fall $L/\mu M = 10^{-2,6}$. In diesem Fall folgt die Weggleichung der Linie $\lambda_R = 10^{12}$ bis zur Entartungsgrenze, die bei $T = 10^{6,5}$ oder $10^{6,6}$ erreicht wird. Bis zum Mittelpunkt steigt die Temperatur bis auf etwa $10^{6,9}$ oder $10^{7,0}$. Die Mittelpunktsdichte wird nun aber nur etwa 10^5 betragen (Polytrogenindex wenig über $3/2$), es ist also nicht mit Entartung der He-Kerne zu rechnen. Es scheint danach, daß die Grenzleuchtkraft, bei der noch gerade im Mittelpunkt Entartung der He-Kerne eintritt, etwa bei $L/\mu M = 10^{-4}$ liegen wird.

¹⁰ S. den Bericht des Verf. „Der innere Aufbau der Sterne“ in Bd. 20 der FIAT-Review („Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946“), im Erscheinen.